Geometrie
WS 2024/25

Blatt 1

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 29.10, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (5 + 3 + 2 + 6 + 4 + 0 Punkte) Die Punkte $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ heißen *kollinear*, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden in $\mathbb{R}^2$ liegen: es gibt eine Gerade L so dass $P_i \in L$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(i) Sei $n \geq 2$. Wir betrachten n Punkte $P_1 = (p_{1x}, p_{1y}), \ldots, P_n = (p_{nx}, p_{ny})$. Zeigen Sie, dass die Punkte kollinear sind, genau dann, wenn

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} p_{1x} & p_{2x} & \ldots & p_{nx} \\ p_{1y} & p_{2y} & \ldots & p_{ny} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \leq 2$$

(ii) Wir betrachten drei Punkte $P_1 = (p_{1x}, p_{1y}), P_2 = (p_{2x}, p_{2y}), P_3 = (p_{3x}, p_{3y}) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie dass diese Punkte kollinear sind, genau dann, wenn

$$\det\begin{pmatrix} p_{1x} & p_{2x} & p_{3x} \\ p_{1y} & p_{2y} & p_{3y} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

(iii) Zeigen Sie dass die Matrix im Punkt (i) Rang 1 hat, genau dann, wenn alle Punkte gleich sind: $P_1 = \cdots = P_n$.

Die Geraden $L_1, \ldots, L_n \subseteq \mathbb{R}^2$ heißen *parallel*, wenn sie die gleiche assoziierte Gerade durch 0 haben. Die Geraden heißen *kopunktal*, wenn sie durch einem gemeinsamen Punkt gehen: es gibt einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ so dass $P \in L_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(iv) Sei $n \geq 2$. Wir betrachten n Geraden $L_1 = \{a_1x + b_1y + c_1 = 0\}, \ldots, L_n = \{a_nx + b_ny + c_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass die Geraden parallel oder kopunktal sind, genau dann, wenn

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix} \leq 2$$

(v) Zeigen Sie dass die Geraden $L_1 = \{x + 2y - 5 = 0\}, L_2 = \{x - y + 1 = 0\}, L_3 = \{2x + y - 4 = 0\}, L_4 = \{3x - y - 1 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ kopunktal sind, und finden Sie ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ die auf jeder Gerade liegt.

(vi) Können Sie analoge Aussagen wie unter (ii) und (iii) formulieren, aber für Geraden? Sie müssen die Aussagen nur formulieren, nicht beweisen.

Aufgabe 2 (4 + 4 + 4 + 4 Punkte)

(i) Finden Sie eine Beschreibung durch Parametrisierungen für die folgende Geraden in $\mathbb{R}^2$

$$L_1 = \{2x - 3y + 1 = 0\}, \quad L_2 = \{2024x - 2024y + 2024 = 0\}$$

(ii) Finden Sie eine Beschreibung durch Gleichungen für die folgende Geraden in $\mathbb{R}^2$.

$$L_3 = \{(5t - 3, 6t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad L_4 = \{(6t - 4, t + 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(iii) Bestimmen Sie die Punkte

$$\{P_{13}\} = L_1 \cap L_3, \quad \{P_{24}\} = L_2 \cap L_4$$

(iv) Finden Sie Gleichungen und eine Parametrisierung für die Gerade

$$L_5 = L(P_{13}, P_{24}).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass eine Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ durch P_0 geht, genau dann, wenn

$$L = \{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0\}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, mit $(a, b) \neq 0$.